Constantin-Lax-Majda 方程式

@litharge3141

2020 年 5 月 15 日

概要

3 次元 Euler 方程式の時間大域的な弱解の存在は知られておらず，常に有限時間で無限大に爆発すると予想している人も多い．このノートでは，そのような爆発のメカニズムを調べるためのモデル方程式として知られている Constantin-Lax-Majda 方程式について元論文に基づいて解説する．

1　導出

1.1　3 次元渦度方程式

Constantin-Lax-Majda 方程式（CLM と略す）は 3 次元渦度方程式の構造を 1 次元で真似をして少しでも理解を前に進めようというものだから，まず 3 次元渦度方程式の導出をする．3 次元 Euler 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

を考える．∇p は厄介なので rot を施して消去する．両辺に rot を施して十分な滑らかさを仮定すると，$\omega \coloneqq \operatorname{rot} u$ として

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u \\ \operatorname{div} \omega = 0 \end{cases} \tag{1}$$

という ω と u の方程式を得る．ここで

$$\begin{cases} \omega = \operatorname{rot} u \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

から $\operatorname{rot} \omega = -\triangle u$ を得るが，これは Poisson 方程式だから 3 次元の基本解と畳み込んで部分積分すると Biot-Savart 積分

$$u(t,x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \times \omega(t,y)}{|x-y|^3} \mathrm{d}x$$

が得られる．これを式 (1) と連立したものを渦度方程式という．2 次元でも同様の操作をすることはできるが，3 次元との最大の違いは渦の伸長項と呼ばれる $\nabla u \cdot \omega$ の有無で，この項のために 3 次元では大域解の存在が証明できていないと考えられている．

1.2　CLM の導出

Biot-Savart 積分から ∇u を求めようとすると，Poisson 方程式の基本解の微分と ω の畳み込みが現れる．これは特異積分作用素と呼ばれるクラスに入る作用素である．空間 1 次元ではこのような作用素と同じ性質を持つものとしてヒルベルト変換 H が知られているから，これを用いる．すなわち，$u_x = H(\omega)$ として Biot-Savart 積分（の微分）を模することにする．爆発解の存在に移流項 $u \cdot \nabla\omega$ は関わらないと考えて，簡単のためこの項を 0 にする．すると 1 次元 Constantin-Lax-Majda 方程式

$$\omega_t = H(\omega)\omega$$

が得られる．

2　厳密解の構成

2.1　主定理

CLM の $\mathbb{R}$ における初期値問題

$$\begin{cases} \omega_t = H(\omega)\omega \\ \omega(0,x) = \omega_0(x) \end{cases}$$

を考える．ここで，ヒルベルト変換 $H : H^1(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R})$ は

$$H(\omega) \coloneqq \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(y)}{x-y}\mathrm{d}y$$

によって与えられる．この時，次が成り立つ．

Theorem 2.1. $\omega_0 \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ の時，*CLM* の初期値問題の解は

$$\omega(t,x) = \frac{4\omega_0(x)}{(2 - tH(\omega_0)(x))^2 + t^2\omega_0^2(x)}$$

によって与えられる．

2.2　補題や用いる性質

Theorem2.1 の証明中に用いる H の性質などをすべて証明する．L^2 におけるフーリエ変換の知識は仮定するが，定数倍の違いによる混乱を避けるために定義だけ載せておく．

Definition 2.1. 空間 1 次元で考える．このノートでは，フーリエ変換 $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \coloneqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

によって定める．また，逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) \coloneqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$

によって定める．

この流儀で行くと畳み込みに対して $\mathcal{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ となる．H が H^1 有界な線形作用素であることの証明から始める．

Theorem 2.2 (L^2 有界性)**.** $\delta>0$ が与えられたとする．H_δ を $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$H_\delta(f)(x):=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>\delta}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y$$

によって定義すると, $H_\delta(f)\in L^2(\mathbb{R})$ であり, $\delta\to 0$ で $H_\delta(f)$ は L^2 収束する．さらに, $H(f):=\lim_{\delta\to 0}H_\delta(f)$ によって $H:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ を定めると H は有界である．

Proof. フーリエ変換を利用して証明をする．

$$h_\delta(x)=\begin{cases}0 & (|x|<\delta)\\ \dfrac{1}{x} & (|x|\geq\delta)\end{cases}$$

によって h_δ を定める．$\mathcal{F}(h_\delta)$ を複素積分を用いて計算すると，$\mathcal{F}(h_\delta)$ は δ によらずに有界であり，さらに，$\lim_{\delta\to 0}\mathcal{F}(h_\delta)(\xi)=-i\sqrt{\pi/2}\operatorname{sgn}\xi$ が成立することが分かる．よって畳み込みの性質から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(H_\delta(f))&=\frac{1}{\pi}\mathcal{F}(h_\delta*f)\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}(h_\delta)\mathcal{F}(f)\end{aligned}$$

が成立することと併せて，ルベーグの収束定理から $\mathcal{F}(H_\delta(f))$ は $\delta\to 0$ で $-i\operatorname{sgn}\xi\,\mathcal{F}(f)$ に L^2 収束する．フーリエ変換の L^2 等長性より，$H_\delta(f)$ も L^2 収束する．$-i\operatorname{sgn}\xi$ は有界だから H は有界線形作用素である． □

証明から $H(f)$ のフーリエ変換は $-i\operatorname{sgn}\xi\,\mathcal{F}(f)$ で与えられる．これはフーリエ掛け算作用素と呼ばれる形をしており，この表示は次の系のほか，このノートを通して用いる．

Corollary 2.2.1 (H^1 有界性)**.** $f\in H^1(\mathbb{R})$ に対して $H(f)\in H^1(\mathbb{R})$ が成立し，H は $H^1(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})$ という有界線形作用素ともみなせる．

Proof. $f\in H^1(\mathbb{R})$ が任意に与えられたとする．$\langle\xi\rangle^{1/2}\mathcal{F}(H(f))(\xi)$ が $L^2(\mathbb{R})$ に入ることを示せばよい．

$$\langle\xi\rangle^{1/2}\mathcal{F}(H(f))(\xi)=-i\operatorname{sgn}\xi\,\langle\xi\rangle^{1/2}\mathcal{F}(f)(\xi)$$

となるが，$f\in H^1(\mathbb{R})$ より，$\langle\xi\rangle^{1/2}\mathcal{F}(f)(\xi)\in L^2(\mathbb{R})$ となる．$-i\operatorname{sgn}\xi$ は有界だから，示された． □

Corollary 2.2.2 (恒等式その１)**.** $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して $H(H(f))=-f$ がほとんどいたるところ成立する．

Proof. 容易なので読者に任せる． □

H は $L^1\to L^1_w$ の有界線形作用素であり，このことと補間定理（と双対性）を用いることで $p>1$ に対して $L^p\to L^p$ とみて有界線形作用素であることが知られている．

Corollary 2.2.3 (恒等式その２)**.** $p_1,p_2>1$ で $1/p_1+1/p_2<1$ となるものが与えられたとする．任意の $f\in L^{p_1}$ と任意の $g\in L^{p_2}$ に対して，

$$H(fg)=fH(g)+H(f)g+H\left(H(f)H(g)\right)$$

がほとんどいたるところ成立する．

Proof. 複素変数へと拡張して証明する． □

3 拡張やそのほかの性質