演習問題解答

@litharge3141

2020 年 8 月 29 日

概要

Karatzas-Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus の Exercise と Problem の解答．問題は載せません．

1 Chapter1

解答 (1.5 Problem)**.** 右連続性を利用して連続な時間を可算に落とす．

任意の $t \geq 0$ に対して $P(X_t = Y_t) = 1$ が成立する．$[0, \infty)$ の稠密な可算集合 $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ を取る．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある P-零集合 N_m が存在して，$\omega \notin N_m$ ならば $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．そこで $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ とおくと，N は P-零集合で，$\omega \notin N$ ならば任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．すなわち，$P(\forall m \in \mathbb{N},\, X_{t_m} = Y_{t_m}) = 1$ となる．X, Y はほとんどいたるところ右連続だから，N_X, N_Y という P-零集合を除いて右連続である．$N \cup N_X \cup N_Y$ を改めて N とおく．N は P-零集合である．$\omega \notin N$ とする．任意の $t \geq 0$ に対して，t に右から収束する $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ の部分列 $(t_{m(k)})_{k=1}^{\infty}$ が稠密性から存在する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_{m(k)}}(\omega) = Y_{t_{m(k)}}(\omega)$ が成立することと，右連続性から $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ となる．t は任意だったから，$P(\forall t \geq 0,\, X_t = Y_t) = 1$ となる．以上により示された．

右連続でなく左連続でもできそうな感じがするが，$t = 0$ のところの処理（というか左連続の定義）が若干面倒であるように思われる．

次の Exercise で使う定理をひとつ証明しておく．

Theorem 1.1. $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ が *RCLL* ならば，その不連続点は高々可算である．

Proof. 不連続点が非可算個存在したと仮定する．$[0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ は $[0, \infty)$ で稠密だから，ある $t \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ が存在して $[t-1, t+1] \cap [0, \infty)$ に不連続点が少なくとも可算個存在する．このとき，ある $s \in [t-1, t+1] \cap [0, \infty)$ が存在して s は不連続点の集積点となる．X の右連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $s < u < s + \delta$ ならば $|X(u) - X(s)| < \varepsilon$ が成立する．また，s における左極限 $\lim_{y \uparrow s} X(y)$ が存在することから $\delta_0 > 0$ が存在して $s - \delta_0 < u < s$ ならば $|X(u) - \lim_{y \uparrow s} X(y)| < \varepsilon$ が成り立つ．これらは s が不連続点の集積点であることに反する．よって示された． □

解答 (1.7 Exercise)**.** 「極限が存在する」という事象を可算な操作で言い換えること，*RCLL* なら不連続な点は高々可算であることに注目する．

$t_0 \in (0, \infty)$ が任意に与えられたとする．任意の $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega)$ は *RCLL* だから不連続点は高々可算で，$(0, t_0)$ 上の不連続点の全体を $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ とおける（ω に依存することに注意）．また，$X(\omega)$ は右連続だから，$X(\omega)$ が $(0, t_0)$ で左連続であることと $(0, t_0)$ で連続であることは同値．したがって

$$\omega \in A \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\, \lim_{s \to t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$$

が成り立つ．$\lim_{s \to t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$ が成り立つことは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $\left| X_{t_k - 1/n}(\omega) - X_{t_k}(\omega) \right| < 1/m$ が成立することと同値．後者は

$$\omega \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \left| X_{t_k - \frac{1}{n}} - X_{t_k} \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

と書き直せる．$\{\left|X_{t_k-1/n}-X_{t_k}\right|<1/m\}\in\mathcal{F}^X_{t_k}$ だから，$\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{\left|X_{t_k-1/n}-X_{t_k}\right|<1/m\}\in\mathcal{F}^X_{t_k}$ である．任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathcal{F}^X_{t_k}\subset\mathcal{F}^X_{t_0}$ となる．したがって

$$A=\bigcap_{k=1}^\infty\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{\left|X_{t_k-1/n}-X_{t_k}\right|<1/m\}\in\mathcal{F}^X_{t_0}$$

となり，示された．

解答 (1.16 Problem)**.** X が直積可測だから，可測集合の X による引き戻しはほとんど直積集合の形で書けることを利用する．

E を X の行先の任意の可測集合とする．$X_T^{-1}(E)\in\mathcal{F}$ を示せばよい．

$$X_T^{-1}(E)=\left\{\omega \mid X_{T(\omega)}(\omega)\in E\right\}=\left\{\omega \mid (T(\omega),\omega)\in X^{-1}(E)\right\}$$

となるから，任意の $F\in\mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F}$ に対して $\{\omega\mid(T(\omega),\omega)\in F\}\in\mathcal{F}$ が成り立つことを示せば X が可測であることから $X_T^{-1}(E)\in\mathcal{F}$ が従う．

$$\mathcal{D}\coloneqq\{F\subset[0,\infty)\times\Omega\mid\{\omega\mid(T(\omega),\omega)\in F\}\in\mathcal{F}\}$$

とおく．$\mathcal{D}$ が σ-代数であることはやるだけなので省略する．$F=E^t\times E^\Omega, E^t\in\mathcal{B}([0,\infty)), E^\Omega\in\mathcal{F}$ とすると T は可測だから $\{\omega\mid(T(\omega),\omega)\in F\}=E^\Omega\cap T^{-1}(E^t)\in\mathcal{F}$ となり，$F\in\mathcal{D}$ となる．したがって直積 σ-代数の定義から $\mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F}\subset\mathcal{D}$ となり，示された．