Kolmogorov-Centsov の定理

@litharge3141

2020 年 6 月 22 日

概要

このノートでは，確率過程の L^p ノルム評価からヘルダー連続性を導く Kolmogorov-Centsov の定理を証明する．この定理はブラウン運動の構成や，確率微分方程式の解の評価など，種々の確率過程の連続性の証明に広く用いられる．

1 定理の主張と証明

Theorem 1.1 (Kolmogorov-Centsov の定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$(B, \|\cdot\|)$ を *Banach* 空間とそのノルムの組とする．$X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ を Ω から B への確率過程とする．

$$\exists C, p, q > 0, \quad \forall s, t \in [0,T], \quad E[\|X_t - X_s\|^p] \leq C\,|t-s|^{1+q}$$

が成立すると仮定する．このとき, 任意の $0 < r < q/p$ に対して, ある Ω から B への確率過程 $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ が存在して，次を満たす．

- 任意の $t \in [0,T]$ に対して $X_t = \tilde{X}_t$ がほとんどいたるところ成立する．
- ほとんどいたるところ正の値を取るある確率変数 $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ とある $M > 0$ が存在して

$$P\left(\omega \,\middle|\, \sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega)\\ s,t\in[0,T]}} \frac{\left\|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right\|}{|t-s|^r} \leq M\right) = 1$$

  が成立する．

特に，X は r 次 *Hölder* 連続な修正 $\tilde{X}$ を持つ．

Proof. $0 < r < q/p$ が任意に与えられたとする．$D_n \coloneqq \left\{\frac{kT}{2^n} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, 2^n\right\}$ とし，$D \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とおく．X_t は D 上一様連続な確率過程であることを示す．そのために，まず最初に

$$P\left(\omega \,\middle|\, \exists n^*(\omega) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n^*(\omega), \max_{1\leq k\leq 2^n} \left\|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right\| < 2^{-rn}\right) = 1 \tag{1}$$

を示す．そのためには，

$$A_n \coloneqq \left\{\omega \,\middle|\, \max_{1\leq k\leq 2^n} \left\|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right\| < 2^{-rn}\right\}$$

とおくと, $P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1$ を示せば十分．このことは $P(\limsup_{n\to\infty} A_n^c) = 0$ と同値である．さらに, Borel-Canteli の補題から $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$ が収束することを証明すれば十分である．これを示す．$s, t \in [0,T]$

に対して，

$$
\begin{aligned}
P(\|X_t - X_s\| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^p} E[\|X_t - X_s\|^p] \quad (\because \text{Chebyshev の不等式}) \\
&\leq \frac{C\,|t-s|^{1+q}}{\varepsilon^p} \quad (\because \text{仮定})
\end{aligned}
$$

を得る．したがって $t = k/2^n, s = (k-1)/2^n, \varepsilon = 2^{-rn}$ とすると

$$
P\left(\left\|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right\| \geq 2^{-rn}\right) \leq C2^{-n(1+q)}2^{rpn} = C2^{-n(1+q-pr)}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
P(A_n^c) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right\| \geq 2^{-rn}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\left\|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right\| \geq 2^{-rn}\right) \\
&\leq C2^{-n(q-pr)}
\end{aligned}
$$

を得る．$q - pr > 0$ だから，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) < \infty$ となる．したがって示された．次に，

$$
\begin{aligned}
&P(\omega \,|\exists n^*(\omega) \in \mathbb{N}, \forall m > \forall n \geq n^*(\omega), \forall s,t \in D_m, \\
&\quad |s-t| < 2^{-n} \Rightarrow \|X_s(\omega) - X_t(\omega)\| < 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-rj}) = 1
\end{aligned} \tag{2}
$$

を示す．(1) の中身の集合から ω をとる．ある $n^*(\omega)$ が存在して，任意の $n \geq n^*(\omega)$ に対して $\max_{1\leq k\leq 2^n} \left\|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right\| < 2^{-rn}$ が成立することに注意する．m についての帰納法で ω が (2) の中身の集合に含まれることを証明する．$m = n+1$ のとき．$s,t \in D_m$ に対して $0 \leq k_s, k_t \leq 2^{n+1}$ を用いて $s = k_s/2^{n+1}$ および $t = k_t/2^{n+1}$ とおける．$|s-t| < 2^{-n}$ ならば $|k_s - k_t| < 2$ であることに注意する．$\max_{1\leq k\leq 2^{n+1}} \left\|X_{\frac{k}{2^{n+1}}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}(\omega)\right\| < 2^{-r(n+1)}$ が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
\|X_s(\omega) - X_t(\omega)\| &= \left\|X_{k_s/2^{n+1}}(\omega) - X_{k_t/2^{n+1}}(\omega)\right\| \\
&< 2 \times 2^{-r(n+1)} \quad (\because |k_s - k_t| < 2)
\end{aligned}
$$

となり，示された．m での成立を仮定して $m+1$ での成立を証明する．$s,t \in D_{m+1}$ に対して，$|s-t| < 2^{-n}$ が満たされるとする．$s', t' \in D_m$ で $|s-s'| \leq 2^{-(m+1)}$ および $|t-t'| \leq 2^{-(m+1)}$ かつ $s \leq s' \leq t' \leq t$ を満たすものが D_m の定め方から存在する．$|s'-t'| \leq 2^{-n}$ が成立することに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\|X_s(\omega) - X_t(\omega)\| &\leq \|X_s(\omega) - X_{s'}(\omega)\| + \|X_{s'}(\omega) - X_{t'}(\omega)\| + \|X_{t'}(\omega) - X_t(\omega)\| \\
&\leq 2^{-r(m+1)} + 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-rj} + 2^{-r(m+1)} \quad (\because \text{帰納法の仮定と (1)}) \\
&= 2\sum_{j=n+1}^{m+1} 2^{-rj}
\end{aligned}
$$

となり，$m+1$ でも成立する．よって ω は (2) の中身に含まれ，(1) よりそのような ω 全体は測度 1 だから，(2) が示された．

□

2　応用例